1. Funktionale Zusammenhänge

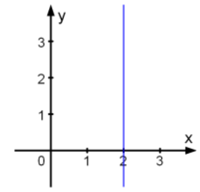
1.1 Was ist eine Funktion?

Eine Zuordnung, die jedem x aus der Definitionsmenge <u>genau ein</u> y aus der Wertemenge zuordnet, heißt **Funktion.**

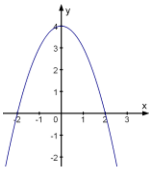
Schreibweisen: f: $x \mapsto y$ oder f (x) = y

Die **Definitionsmenge** D enthält alle x-Werte, die in den Funktionsterm eingesetzt werden dürfen. Vorsicht: Der Nenner darf nie null sein!
Die **Wertemenge** W enthält alle y-Werte, die man erhält, wenn man alle x-Werte der Definitionsmenge in den Funktionsterm einsetzt.
Die graphische Darstellung einer Funktion nennt man **Funktionsgraph**.

Nullstellen einer Funktion sind die x-Werte der Schnittpunkte ihres Graphen mit der x-Achse, d.h. f (x) = y = 0.



Diese Kurve ist <u>kein Funktionsgraph</u>, da zum Wert x = 2 mehr als ein y-Wert gehört



Dieser Graph schneidet die y-Achse bei x_1 = - 2 und x_2 = 2.

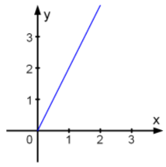
x_1 = - 2 und x_2 = 2 sind Nullstellen.

1.2 Proportionalität

1.2.1 Direkte Proportionalität

Wird dem doppelten, dreifachen, ..., n-fachen Wert einer Größe x der doppelte, dreifache, ..., n-fache Wert einer Größe y zugeordnet, so sind x und y zueinander **direkt proportional**.

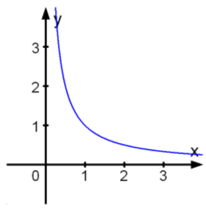
Der <u>Quotient</u> $k = \dfrac{y}{x}$ zweier direkt proportionaler Größen ist immer <u>wertegleich</u>.



Ihr Graph ist eine Ursprungsgerade im I. Quadranten mit Steigung m

1.2.2 Indirekte Proportionalität

Wird dem doppelten, dreifachen, ..., n-fachen Wert einer Größe x der halbe, dritte, ..., n-te Teil einer Größe y zugeordnet, so sind x und y zueinander **indirekt proportional**.
Das <u>Produkt</u> k = xy zweier indirekt proportionaler Größen ist immer <u>wertegleich</u>.



Ihr Graph ist eine Hyperbel im I. Quadranten

1.3 Kreisumfang und Kreisfläche

$$U_{Kreis} = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$
$$A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$$

d = Durchmesser, r = Radius, π = 3,14... Kreiszahl

Der Kreisdurchmesser und der Kreisumfang sind direkt proportional zueinander, Kreisdurchmesser und Kreisfläche sind nicht proportional.

2. Lineare Funktionen

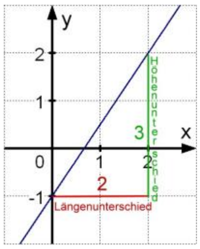
2.1 Geradengleichungen

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Jede lineare Funktion hat den Form $\boxed{y = mx + t}$

m ist die **Steigung** der Geraden

$$m = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{Längenunterschied}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

t ist der **y-Achsenabschnitt**.



Beispiel: $y = \frac{3}{2}x - 1$

Alle Geraden <u>mit gleicher Steigung</u> m sind <u>parallel</u>.
Für m < 0 fällt, für m > 0 steigt die Gerade;
für m = 0 verläuft sie parallel zur x-Achse.
Je größer der Betrag von m ist, desto steiler ist die Gerade

Implizite Form:
ax + by + c = 0

Besondere Geraden:
y = ax Ursprungsgerade
y = x Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten
y = - x Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten
y = a Parallele zur x-Achse durch (0 | a), **x-Achse: y = 0**
x = a Parallele zur y-Achse durch (a | 0), **y-Achse: x = 0**
(keine Funktion, siehe 1.1)

2.2 Punkt und Gerade

Ein Punkt liegt auf einer Geraden, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen.

g: $y = 3x - 2$;
$P(2 \,|\, 4) \in g$, da $4 = 3 \cdot 2 - 2$

2.3 Aufstellen einer Geradengleichung durch zwei Punkte

Die Gerade g soll durch A (4 | 2) und B (3 | - 1) verlaufen.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2-(-1)}{4-3} = 3$$

Steigung m und Koordinaten von A oder B in $y = mx + t$ einsetzen:

$2 = 3 \cdot 4 + t \Rightarrow t = -10$

g: $y = 3x - 10$

2.4 Lineare Ungleichungen

Lineare Ungleichungen werden wie lineare Gleichungen aufgelöst

Allerdings ist das **Inversionsgesetz** zu beachten:
Multipliziert oder dividiert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, so dreht sich das Ungleichungszeichen um!!!

Intervallschreibweise:

Offenes Intervall:	$]1\,;5[= \{ x \in Q \mid 1 < x < 5\}$
	alle rationalen Zahlen zwischen 1 und 5
Halboffenes Intervall:	$]1\,;5] = \{ x \in Q \mid 1 < x \le 5 \}$
	Wie]1 ; 5[, aber 5 eingeschlossen
Geschlossenes Intervall:	$[1\,;5] = \{ x \in Q \mid 1 \le x \le 5 \}$
	Wie]1 ; 5 [, aber 1 sowie 5 eingeschlossen

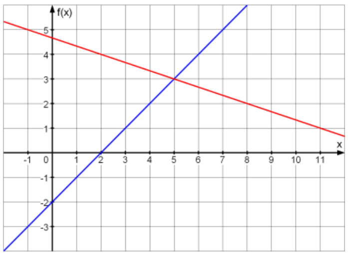
$2 - 3x < 5 \quad | -2$
$-3x < 5 \quad | : (-3)$
$X > -1$
$L = \{ x \in Q \mid x > -1 \} =]-1\,;\infty[$

3. Lineare Gleichungssysteme

In der 8. Klasse werden nur zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten behandelt.

3.1 Das graphische Lösungsverfahren

Die zwei linearen Gleichungen werden als Geradengleichungen aufgefasst. Die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden sind die Lösung des Gleichungssystems.



I $x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = x - 2$

II $y = -\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}$

Schnittpunkt: (5 | 3)
L={(5 | 3)}
Da Zeichenungenauigkeiten auftreten können, ist es ratsam, die Probe zu machen. Dazu müssen x und y jeweils in beide Gleichungen eingesetzt werden:

I $5 - 3 - 2 = 0$ ✓

II $-\frac{1}{3} \cdot 5 + 4\frac{2}{3} = \frac{-5+14}{3} = 3$ ✓

3.2 Anzahl der Lösungen

Ein lineares Gleichungssystem hat
- 1 Lösung, wenn sich die zugehörigen Geraden schneiden (siehe 3.1)
- keine Lösung, wenn die Geraden parallel sind,
  z.B. g: y = 2x + 3 und h: y = 2x – 7, L = { }
- unendlich viele Lösungen, wenn die Geraden identisch sind,
  z.B. g: x + y + 1 = 0 und h: 2x + 2y + 2 = 0

$$L = \{(x;y) \mid x + y + 1 = 0\}$$

3.3 Das Gleichsetzungsverfahren

Das Gleichsetzungsverfahren verwendet man, wenn jeweils beide Gleichungen nach derselben Variablen aufgelöst sind. Dann setzt man beide Gleichungen gleich.

$$\left.\begin{array}{l} \text{I } y = 2x + 3 \\ \text{II } y = x - 1 \end{array}\right\} 2x + 3 = x - 1 \Leftrightarrow x = -4$$

y erhält man, indem man x in I oder II einsetzt
y in II: $y = -4 - 1 = -5$
L = {(- 4 | - 5)}

3.4 Das Einsetzungsverfahren

Das Einsetzungsverfahren verwendet man, wenn eine Gleichung nach einer Variablen bereits aufgelöst ist. Diesen Term setzt man dann in die andere Gleichung ein.

I y = 2x + 3
II x – y -1 = 0
y in II: x – (2x+3)-1=0 (lösen wie oben)

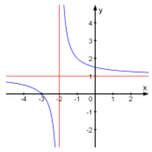
3.5 Das Additionsverfahren

Eine Gleichung bzw. beide Gleichungen werden mit Faktoren so multipliziert, dass eine Variable in beiden Gleichungen gleiche Koeffizienten mit verschiedenen Vorzeichen hat. Die neuen Gleichungen werden addiert. Dadurch erhält man eine Gleichung mit nur einer unbekannten Variablen.

I 5x – 2y = 3 (·3)
II 2x + 3y = 5 (·2)
I' 15x – 6y = 9
II' 4x + 6y = 10
I' + II' 19x = 19 (lösen wie oben)

4. Elementare gebrochen-rationale Funktionen

Bei gebrochen-rationalen Funktionen kommt die Variable im Funktionsterm mindestens im Nenner vor.



$$f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$$

4.1 Graphen gebrochen-rationaler Funktionen

Die Nullstellen des Nenners heißen **Definitionslücken**
Asymptoten sind Geraden, an die sich der Graph einer Funktion anschmiegt

D = Q\ {-2} (Definitionslücke x = -2)
y=1 waagerechte Asymptote
x = -2 senkrechte Asymptote

4.2 Bruchterme

Bei Bruchtermen kommt die Variable mindestens im Nenner vor.

$$\frac{3}{2x}, \frac{2x+1}{x^2}$$

Erweitern: Zähler und Nenner werden mit demselben Term multipliziert.

$$\frac{4x+3}{2} = \frac{3x \cdot (4x+3)}{3x \cdot 2} = \frac{12x^2+9x}{6x}$$

Kürzen: Zähler und Nenner werden durch denselben Term dividiert.
Dazu muss im Zähler und Nenner geeignet ausgeklammert werden

$$\frac{12x^2+9x}{6x} = \frac{3x(4x+3)}{3x \cdot 2} = \frac{4x+3}{2}$$

Addieren und Subtrahieren:
Zwei Bruchterme werden addiert bzw. subtrahiert, indem man sie auf einen gemeinsamen Nenner – am besten auf den kleinsten gemeinsamen Nenner (= **Hauptnenner**) - erweitert und dann die Zähler addiert bzw. subtrahiert.

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x} = \frac{2x}{(x-1)x} + \frac{3(x-1)}{x(x-1)} = \frac{2x+3x-3}{x(x-1)} = \frac{x\ldots}{x^2\ldots}$$

4.3 Bruchgleichungen

Bruchgleichungen löst man, indem man

- zuerst die Definitionsmenge bestimmt,
- die Bruchterme auf den Hauptnenner erweitert und zusammenfasst,
- mit dem Hauptnenner multipliziert,
- die lineare Gleichung löst und
- überprüft, ob die Lösung in der Definitionsmenge enthalten ist.

$$\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{3}{x^2} \qquad \text{D= Q\\{0;1}}$$

$$\frac{2x^2}{x^2(x-1)} - \frac{2x(x-1)}{x^2(x-1)} = \frac{3(x-1)}{x^2(x-1)}$$

$$\frac{2x^2 - 2x^2 + 2x}{x^2(x-1)} = \frac{3x-3}{x^2(x-1)}$$

$$2x = 3x - 3$$

X = 3 $\in D$ L = {3}

4.4 Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten

$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-mal}}$ a heißt **Basis** (Grundzahl) und n heißt **Exponent** (Hochzahl).

Negative Exponenten:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \; (a \in Q \setminus \{0\}, n \in Q)$$

Sonderfall: $a^0 = 1$

Zehnerpotenzen (Gleitkommadarstellung)
Mit Hilfe von Zehnerpotenzen lassen sich sehr große und sehr kleine Zahlen übersichtlich schreiben. Für den Faktor a vor der Zehnerpotenz gilt: $1 \le a < 10$.

4200000 = 4,2 · 10^6
0,000036 = 3,6 · 10^{-5}

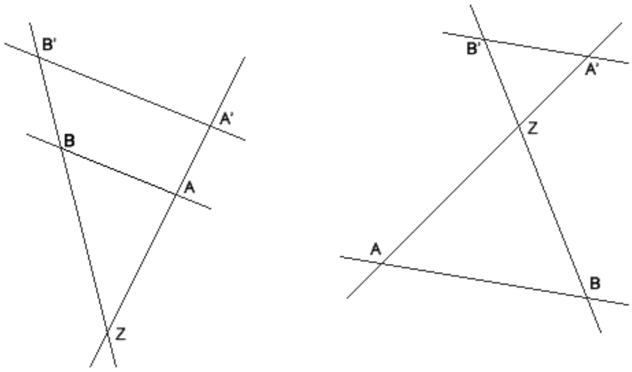
Potenzgesetze:
Für $a, b \in Q \setminus \{0\}$ gilt:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$
$a^m : b^m = (a:b)^m$
$(a^m)^n = a^{mn}$

$0{,}1^{-2} = 100$
$x^{-1} \cdot x^2 : x^{-3} = x^{-1+2-(-3)} = x^4$
$(2x^2)^3 = 2^3 \cdot x^{2 \cdot 3} = 8x^6$

5. Geometrie: Strahlensatz und Ähnlichkeit

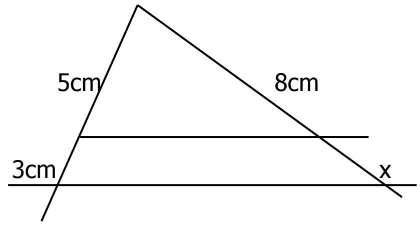
5.1 Strahlensatz

Voraussetzung: Zwei sich schneidende Geraden werden von zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten.
Dann gilt sowohl bei V- als auch bei der X-Figur:



$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$

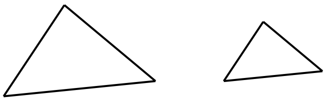
$$\overline{ZA} : \overline{ZA'} = \overline{ZB} : \overline{ZB'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$$



$$\frac{5cm}{3cm} = \frac{8cm}{xcm} \quad | \cdot 3 \cdot x$$

5X = 24 | :5
X = 4.8 cm

5.2 Ähnlichkeit



Zwei Figuren sind zueinander ähnlich, wenn eine Figur durch eine Kongruenzabbildung (z.B. Spiegelung) und eine zentrische Streckung aus der anderen hervorgegangen ist.
Die wichtigsten **Ähnlichkeitssätze**:

- Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen mit zwei Winkeln des anderen Dreiecks übereinstimmen (**WW-Satz**)
- Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen (**S:S:S-Satz**).

6. Wahrscheinlichkeitsrechnung: Laplace-Experimente

Als Beispiel wird das Werfen einer 1€-Münze und einer 2€-Münze betrachtet.

6.1 Ergebnisraum und Ereignis

Ein Experiment, dessen Ausgang nicht vorhersagbar ist, nennt man **Zufallsexperiment**. Den Ausgang des Experiments nennt man **Ergebnis**. Alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man im **Ergebnisraum** Ω zusammen.
Hier: Ω = {KK; KZ; ZK; ZZ}, wobei K bedeutet Kopf, Z bedeutet Zahl

Die Teilmenge eines Ergebnisraums nennt man **Ereignis** E.
Beispiel: E_1 = „Es tritt genau einmal eine Seite auf." = {KZ; ZK}
Das **Gegenereignis** $\overline{E}$ tritt ein, wenn das Ereignis E nicht eintritt.
Bsp.: $\overline{E_1}$ = „Die Münzen zeigen beide Kopfen oder beide Zahl." = {KK; ZZ}

6.2 Laplacewahrscheinlichkeit

Zufallsexperimente, bei denen jedes der möglichen Ergebnisse <u>gleichwahrscheinlich</u> ist, heißen **Laplace-Experimente**.
Für die Wahrscheinlichkeit eines Laplace-Experiments gilt:

$$\boxed{P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}} \quad (\text{hier: } P(E_1) = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2})$$

Sonderfälle:
P ({ }) = 0 Wahrscheinlichkeit für das unmögliche Ereignis
P (Ω) = 1 Wahrscheinlichkeit für das sichere Ereignis

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$