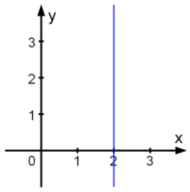
1. Funktionale Zusammenhänge

1.1 Was ist eine Funktion?

Eine Zuordnung, die jedem x aus der Definitionsmenge genau ein y aus der Wertemenge zuordnet, heißt **Funktion.**

Schreibweisen: f: $x \mapsto y$ oder f (x) = y

Die **Definitionsmenge** D enthält alle x-Werte, die in den Funktionsterm eingesetzt werden dürfen. Vorsicht: Der Nenner darf nie null sein!
Die **Wertemenge** W enthält alle y-Werte, die man erhält, wenn man alle x-Werte der Definitionsmenge in den Funktionsterm einsetzt.
Die graphische Darstellung einer Funktion nennt man **Funktionsgraph**.

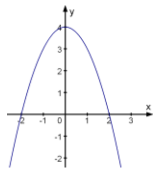


Dieser Graph ist kein Funktionsgraph, da zum Wert x = 2 mehr als ein y-Wert gehört

1.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Nullstellen einer Funktion sind die x-Werte der Schnittpunkte ihres Graphen mit der x-Achse, d.h. f (x) = y = 0.

S_y (Schnittpunkt mit der y-Achse), der x-Wert ist = 0. Setze x =0 und rechne den entsprechende y-Wert aus.



Dieser Graph schneidet die y-Achse bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.

$x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ sind Nullstellen.

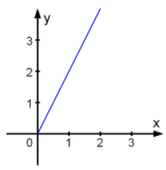
y = 2x +3
S_x: 0 = 2x + 3
X = -1,5 $S_x = (-1{,}5/0)$
S_y: y = 2 · 0 +3 $S_y = (0/3)$

1.3 Proportionalität

1.3.1 Direkte Proportionalität

Wird dem doppelten, dreifachen, …, n-fachen Wert einer Größe x der doppelte, dreifache, …, n-fache Wert einer Größe y zugeordnet, so sind x und y zueinander **direkt proportional**.

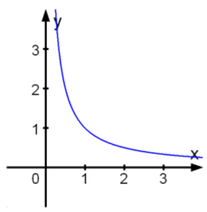
Der Quotient $k = \frac{y}{x}$ zweier direkt proportionaler Größen ist immer wertegleich.



Ihr Graph ist eine Ursprungsgerade im I. Quadranten mit Steigung m

1.3.2 Indirekte Proportionalität

Wird dem doppelten, dreifachen, …, n-fachen Wert einer Größe x der halbe, dritte, …, n-te Teil einer Größe y zugeordnet, so sind x und y zueinander **indirekt proportional**.
Das Produkt k = xy zweier indirekt proportionaler Größen ist immer wertegleich.



Ihr Graph ist eine Hyperbel im I. Quadranten

2. Lineare Funktionen

2.1 Geradengleichungen

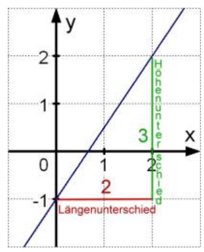
Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Jede lineare Funktion hat den Form

y = mx + t

m ist die **Steigung** der Geraden

$$m = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{Längenunterschied}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

t ist der **y-Achsenabschnitt**.



Beispiel: $y = \frac{3}{2}x - 1$

Alle Geraden mit gleicher Steigung m sind parallel.
Für m < 0 fällt, für m > 0 steigt die Gerade;
für m = 0 verläuft sie parallel zur x-Achse.
Je größer der Betrag von m ist, desto steiler ist die Gerade

Implizite Form:
ax + by + c = 0

Besondere Geraden:
y = ax Ursprungsgerade
y = x Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten
y = - x Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten

y = a Parallele zur x-Achse durch (0 | a),
x-Achse: y = 0
x = a Parallele zur y-Achse durch (a | 0),
y-Achse: x = 0
(keine Funktion, siehe 1.1)

2.2 Punkt und Gerade

Ein Punkt liegt auf einer Geraden, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen.

g: y = 3x – 2;
P (2 | 4) ∈ g, da $4 = 3 \cdot 2 - 2$

2.3 Aufstellen einer Geradengleichung durch zwei Punkte

Die Gerade g soll durch A (4 | 2) und B (3 | - 1) verlaufen.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2-(-1)}{4-3} = 3$$

Steigung m und Koordinaten von A oder B in y = mx + t einsetzen:
$2 = 3 \cdot 4 + t \Rightarrow t = -10$
g: y = 3x – 10

2.4 Lineare Ungleichungen

Lineare Ungleichungen werden wie lineare Gleichungen aufgelöst

(Allerdings ist das **Inversionsgesetz** zu beachten:
Multipliziert oder dividiert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, so dreht sich das Ungleichungszeichen um!!!)

2 – 3x < 5 | -2
-3x < 5 | : (-3)
x > -1
L = { $x \in Q$ | x > -1 } =] -1 ; ∞ [

Intervallschreibweise:

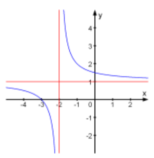
Offenes Intervall:	]1 ; 5[= { $x \in Q$ | 1< x< 5} alle rationalen Zahlen zwischen 1 und 5, aber nicht 1 oder 5
Halboffenes Intervall:	]1 ; 5] = { $x \in Q$ | 1 < x ≤ 5 } Wie]1 ; 5[, aber 5 ist auch dabei
Geschlossenes Intervall:	[1 ; 5] = { $x \in Q$ | 1 ≤ x ≤ 5 } Wie]1 ; 5 [, aber 1 sowie 5 eingeschlossen

3. Elementare gebrochen-rationale Funktionen

Bei gebrochen-rationalen Funktionen kommt die Variable im Funktionsterm mindestens im Nenner vor.

3.1 Graphen gebrochen-rationaler Funktionen

Die Nullstellen des Nenners heißen **Definitionslücken**
Asymptoten sind Geraden, an die sich der Graph einer Funktion nähert aber nie trifft.



$$f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$$

D = Q\ {-2} (Definitionslücke x = -2)
y=1 waagerechte Asymptote
x = -2 senkrechte Asymptote

3.2 Verschiebung von Hyperbeln

Allgemein: f: x ↦ $\frac{a}{x+b} + c$ a,b, c ∈ Q
a ist die Streckungsfaktor
b ist die Verschiebung in x-Richtung (nach rechts wenn b negativ ist, nach links wenn b positiv ist)
c ist die Verschiebung in y-Richtung (nach oben wenn positiv, nach unten wenn negativ)

4. Bruchterme und Bruchgleichungen

4.1 Bruchterme

Bei Bruchtermen kommt die Variable mindestens im Nenner vor.

$$\frac{3}{2x}, \frac{2x+1}{x^2}$$

Erweitern: Zähler und Nenner werden mit demselben Term multipliziert.

$$\frac{4x+3}{2} = \frac{3x\cdot(4x+3)}{3x\cdot 2} = \frac{12x^2+9x}{6x}$$

Kürzen: Zähler und Nenner werden durch denselben Term dividiert.
Dazu muss im Zähler und Nenner geeignet ausgeklammert werden

$$\frac{12x^2+9x}{6x} = \frac{3x(4x+3)}{3x\cdot 2} = \frac{4x+3}{2}$$

Addieren und Subtrahieren:
Zwei Bruchterme werden addiert bzw. subtrahiert, indem man sie auf einen gemeinsamen Nenner – am besten auf den kleinsten gemeinsamen Nenner (= **Hauptnenner**) - erweitert und dann die Zähler addiert bzw. subtrahiert.

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{1(x-1)}{x(x-1)} + \frac{2x}{x(x-1)} = \frac{x-1+2x}{x(x-1)}$$

$$= \frac{3x-1}{x(x-1)}$$

Multiplizieren:
Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner rechnen (wenn möglich , vorher kürzen)

$$\frac{4}{x^2} \cdot \frac{x}{2x+2} = \frac{4\cdot x}{x^2 \cdot 2(x+1)} = \frac{2}{x(x+1)}$$

Dividieren:
Multiplizieren den Dividend mit dem Kehrwert des Divisors

4.2 Bruchgleichungen

Bruchgleichungen löst man, indem man

- zuerst die Definitionsmenge bestimmt,
- die Bruchterme auf den Hauptnenner erweitert und zusammenfasst,
- mit dem Hauptnenner multipliziert,
- die lineare Gleichung löst und
- überprüft, ob die Lösung in der Definitionsmenge enthalten ist.

Oder mit jedem Nenner sschrittweise multiplizieren

$\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{3}{x^2}$ D= Q\{0;1}

$$\frac{2x^2}{x^2(x-1)} - \frac{2x(x-1)}{x^2(x-1)} = \frac{3(x-1)}{x^2(x-1)}$$

$\frac{2x^2-2x^2+2x}{x^2(x-1)} = \frac{3(x-1)}{x^2(x-1)}$ | $\cdot x^2(x-1)$

$2x = 3x - 3$ | -2x; +3

x = 3 $\in D$ L = {3}

4.3 Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten

$a^n = \underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n-\text{mal}}$ a heißt **Basis** (Grundzahl) und n heißt **Exponent** (Hochzahl).

Negative Exponenten:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \in Q \setminus \{0\}$, n $\in Q$)

Sonderfall: $a^0 = 1$

$0{,}1^{-2} = 100$
$x^{-1} \cdot x^2 : x^{-3} = x^{-1+2-(-3)} = x^4$
$(2x^2)^3 = 2^3 \cdot x^{2\cdot 3} = 8x^6$

Potenzgesetze:
Für $a,b \in Q\setminus\{0\}$ gilt:
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$
$a^m \cdot b^m = (ab)^m$
$a^m : b^m = (a:b)^m$
$(a^m)^n = a^{mn}$

4.4 Formel auflösen

Umformen wie bei Gleichungen, damit dir gesuchte Variable allein auf 1 Seite steht.

$v = \frac{s}{t}$ | · t
$vt = s$ (nach s aufgelöst)

5. Wahrscheinlichkeitsrechnung: Laplace-Experimente

Als Beispiel wird das Werfen einer 1€-Münze und einer 2€-Münze betrachtet.

5.1 Ergebnisraum und Ereignis

Ein Experiment, dessen Ausgang nicht vorhersagbar ist, nennt man **Zufallsexperiment**. Den Ausgang des Experiments nennt man **Ergebnis**.
Alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man im **Ergebnisraum** Ω zusammen.
Hier: Ω = {KK; KZ; ZK; ZZ}, wobei K bedeutet Kopf, Z bedeutet Zahl

Die Teilmenge eines Ergebnisraums nennt man **Ereignis** E.
Beispiel: E_1 = „Es tritt genau einmal eine Seite auf." = {KZ; ZK}

Das **Gegenereignis** $\overline{E}$ tritt ein, wenn das Ereignis E nicht eintritt.
Bsp.: $\overline{E_1}$ = „Die Münzen zeigen beide Kopfen oder beide Zahl." = {KK; ZZ}

Sonderfälle:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

5.2 Laplacewahrscheinlichkeit

Zufallsexperimente, bei denen jedes der möglichen Ergebnisse gleich-wahrscheinlich ist, heißen **Laplace-Experimente**.
Für die Wahrscheinlichkeit eines Laplace-Experiments gilt:

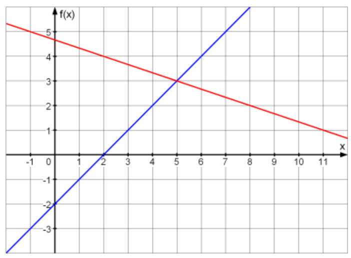
$$\boxed{P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}} \quad (\text{hier: } P(E_1) = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2})$$

6. Lineare Gleichungssysteme

Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten.

6.1 Das graphische Lösungsverfahren

Die zwei linearen Gleichungen werden als Geradengleichungen aufgefasst. Die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden sind die Lösung des Gleichungssystems.



I $x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = x - 2$

II $y = -\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3}$

Schnittpunkt: (5 | 3)
L={(5 | 3)}
Da Zeichenungenauigkeiten auftreten können, ist es ratsam, die Probe zu machen. Dazu müssen x und y jeweils in beide Gleichungen eingesetzt werden:

I $5 - 3 - 2 = 0$ ✓

II $-\frac{1}{3} \cdot 5 + 4\frac{2}{3} = \frac{-5+14}{3} = 3$ ✓

6.2 Anzahl der Lösungen

Ein lineares Gleichungssystem hat
- 1 Lösung, wenn sich die zugehörigen Geraden schneiden (siehe 3.1)
- keine Lösung, wenn die Geraden parallel sind,
  z.B. g: y = 2x + 3 und h: y = 2x – 7, L = { }
- unendlich viele Lösungen, wenn die Geraden deckungsgleich sind,
  z.B. g: x + y + 1 = 0 und h: 2x + 2y + 2 = 0

$$L = \{(x;y) | x + y + 1 = 0\}$$

6.3 Das Gleichsetzungsverfahren(rechnerisch auflösen)

Das Gleichsetzungsverfahren verwendet man, wenn jeweils beide Gleichungen nach derselben Variablen aufgelöst sind. Dann setzt man beide Gleichungen gleich.

$$\left.\begin{array}{l} \text{I } y = 2x + 3 \\ \text{II } y = x - 1 \end{array}\right\} 2x + 3 = x - 1 \Leftrightarrow x = -4$$

y erhält man, indem man x in I oder II einsetzt
y in II: $y = -4 - 1 = -5$
L = {(- 4 | - 5)}

6.4 Das Einsetzungsverfahren

Das Einsetzungsverfahren verwendet man, wenn eine Gleichung nach einer Variablen bereits aufgelöst ist. Diesen Term setzt man dann in die andere Gleichung ein.

I y = 2x + 3
II x – y -1 = 0
y in II: x – (2x+3)-1=0 (lösen wie oben)

6.5 Das Additionsverfahren

Eine Gleichung bzw. beide Gleichungen werden mit Faktoren so multipliziert, dass eine Variable in beiden Gleichungen gleiche Koeffizienten mit verschiedenen Vorzeichen hat. Die neuen Gleichungen werden addiert. Dadurch erhält man eine Gleichung mit nur einer unbekannten Variablen

I $5x - 2y = 3$ (·3)
II $2x + 3y = 5$ (·2)
I′ $15x - 6y = 9$
II′ $4x + 6y = 10$
I′ + II′ $19x = 19$ (lösen wie oben)

7. Kreis Prisma und Zylinder

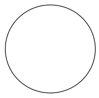
7.1 Kreisumfang und Kreisfläche

$U_{Kreis} = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$

$A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$

d = Durchmesser, r = Radius, π = 3,14… Kreiszahl

Der Kreisdurchmesser und der Kreisumfang sind direkt proportional zueinander, Kreisdurchmesser und Kreisfläche sind nicht proportional.



Kreis mit r = 5cm

$U_{Kreis} = 2r \cdot \pi = 2 \cdot 5\,cm \cdot \pi$

$U_{Kreis} \approx 31{,}4\,cm$

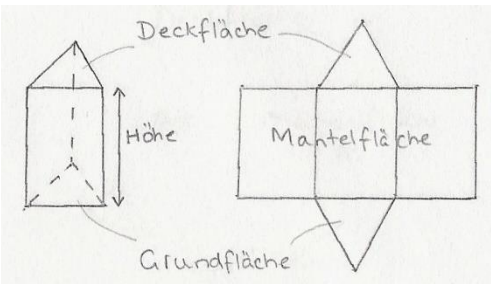
$A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi = (5\,cm)^2 \cdot \pi$

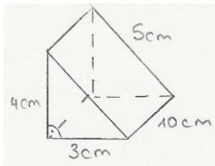
$A_{Kreis} \approx 78{,}5\,cm^2$

7.2 Oberflächeninhalt und Volumen Prisma

Ein Prisma ist ein Körper, der als Grund und Deckfläche zwei kongruente, parallele Vielecke hat.
Alle rechteckigen Seitenflächen bilden die Mantelfläche M.

$V_{Prisma} = G \cdot h$
$O_{prisma} = 2G + M$





$V = G \cdot h$
$= 0{,}5 \cdot 3cm \cdot 4\,cm \cdot 10\,cm$
$= 60\,cm^3$

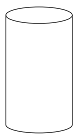
$O = 2G + M$
$= 2 \cdot (0{,}5 \cdot 3\,cm \cdot 4\,cm) + (3\,cm + 4\,cm + 5\,cm) \cdot 10\,cm$

$= 162\,cm^2$

7.3 Oberflächeninhalt und Volumen Zylinder

Bei einem Zylinder sind Grund- und Deckflächen zwei parallele Kreise mit gleichem Radius.

Der Mantel ist ein Rechteck mit den Seitenlängen h und U_{Kreis}.
$M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$
$V_{Zylinder} = G \cdot h$
$= r^2\pi \cdot h$
$O_{Zylinder} = 2G + M$
$= r^2\pi + 2r\pi \cdot h$



$r_{Grundfläche} = 4\,cm$
Höhe h = 10 cm

$V = G \cdot h = 4^2\pi \cdot 10$
$V \approx 502{,}7\,cm^3$