1. Reele Zahlen

1.1 Quadratwurzeln

Die Quadratwurzel (Wurzel) von a (a ≥ 0) ist diejenige nicht negative Zahl, die quadriert a ergibt. Schreibweise $\sqrt{a}$.
Die Zahl a unter der Wurzel nennt man **Radikand**.

$\sqrt{81}$: $9^2 = 81$ => $\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$
Es gibt 2 Zahlen deren Quadrat 2,25 ist, +1,5 und -1,5
Löse $x^2 = 2{,}25$,
$x_1 = 1{,}5$ $x_2 = -1{,}5$

1.2 Reele Zahlen R

Es gibt Zahlen, die nicht als Bruch darstellbar sind. Die sind **irrationale Zahlen**. Z.B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$ oder π

Rationalen Zahlen und irrationalen Zahlen bilden die Menge der reellen Zahlen.

rationale Zahlen: $\frac{2}{3}$; $1{,}2323\ldots$; $\sqrt{4}$; $1{,}\bar{4}$;
irrationale Zahlen: $\sqrt{5}$

1.3 Der Heron-Algorithmus

Eine Näherungswert für $\sqrt{a}$ (a> 0) berechnen
Startwert $x_1 > 0$
$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right)$ $x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right)$ $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$

Berechne eine Näherungswert für $\sqrt{5}$
Startwert = 1
$x_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{1}\right) = 3$

$x_3 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{5}{3}\right) = \frac{7}{3}$
$x_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} + \frac{5}{\frac{7}{3}}\right) = \frac{47}{21}$

1.4 Rechnen mit Quadratwurzeln

Multiplikation: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ a ≥ 0 und b ≥ 0
Division: $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ bzw $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ a ≥ 0 und b > 0

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$
$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$

Summen : Nur wenn sie den gleichen Radikand haben
$2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = 5\sqrt{a}$

Teilweise radizieren : mit Hilfe die Multiplikationsregel

$\sqrt{24} + \sqrt{150} = \sqrt{4 \cdot 6} + \sqrt{25 \cdot 6} = 2\sqrt{6} + 5\sqrt{6} = 7\sqrt{6}$
(Zahlen teilweise radizieren)

Quadrieren und Wurzelziehen
Wurzel kann man nur aus nicht negativen reellen Zahlen ziehen.
$\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{25x^2} = 5|x|$

1.5 Termumformung

Rationalmachen des Nenners

Bruch erweitern, damit es kein Wurzel im Nenner mehr gibt.

$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{7}}{7 - 5} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{7}}{2}$$

Wurzelziehen mit binomische Formeln

$\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = \sqrt{(x + y)^2} = |x + y|$

Mit Binomischeformel ergänzen

2. Quadratische Funktionen und Gleichungen

2.1 Erkennen quadratische Funktionen und Gleichungen

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c ϵ R mit a ≠ 0) ist eine quadratische Funktion.

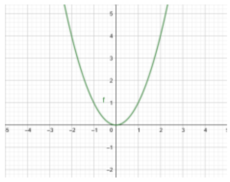
Quadratische Gleichungen z.B. $4x^2 + 3x - 5 = 0$

Normalparabel

$f(x) = x^2$

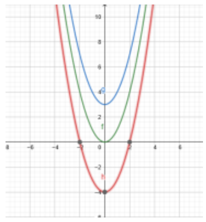
Der Graph ist ein Parabel, verläuft oberhalb der x-Achse, durch den Ursprung. Sie ist symmetrisch zur y-Achse.
S(0| 0) ist der Scheitelpunkt.

Es gibt 1 Nullstelle (0|0)



2.2 Verscheibung der Normalparabel entlang die Achsen

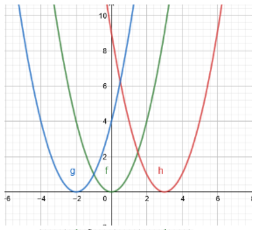
Verschiebung in y Richtung
$f(x) = x^2 + e$ Der Graph wird um e Einheiten nach oben bzw nach unten verschoben.
Scheitel (0|e)
e>0 keine Nullstellen
e< 0 2 Nullstellen



$g(x) = x^2 + 3$ 3 LE nach oben

$h(x) = x^2 – 4$ 4 LE nach unten verschoben

Verschiebung in x Richtung
$F(x) = (x+d)^2$ Der Graph ist in d Richtung nach links bzw nach rechts verschoben.
Scheitel (-d| 0)

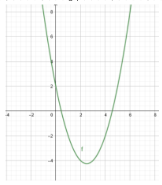


$g(x) = (x + 2)^2$
2 LE nach **links**
$h(x) = (x- 3)^2$
3 LE nach **rechts**

2.3 Allgemeine Verscheibung von Normalparabeln

Allgemein Form $f(x) = x^2 + bx +c$
Scheitelform $f(x) = (x+d)^2 + e$
Der Scheitel ist leicht abzulesen. Scheitel (-d|e)
Quadratische Ergänzung – vom allgemeine Form auf Scheitelform

$$f(x) = x^2 + bx +c$$
$$= x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$
$$= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\right)$$



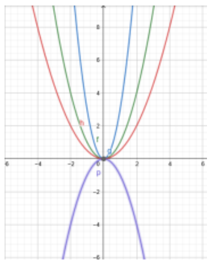
$$f(x) = x^2 – 5x + 2$$
$$= x^2 – 5x + 2{,}5^2 - 2{,}5^2 + 2$$
$$= (x - 2{,}5)^2 - 6{,}25 + 2$$
$$= (x - 2{,}5)^2 - 4{,}25$$
S (2,5 | - 4,25)

2.4 Enge und weite Parabeln

$f(x) = ax^2$

a > 1 Der Graph ist enger ist der Normalparabel
0< a < 1 Der Graph ist weiter als der Normalparabel

a < 0 Der Graph ist nach unten geöffnet



$f(x) = x^2$
$g(x) = 3x^2$
$h(x) = 0{,}5x^2$
$p(x) = -x^2$

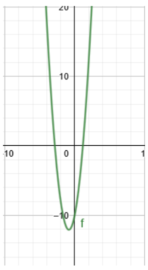
2.5 Allgemeine quadratische Funktionen

Allgemeinen Form
$f(x) = ax^2 +bx +c$
Scheitelform
$f(x) = a(x+d)^2 +e$

Monotonieverhalten – die x-Werte wo der Graph steigt bzw fällt.

Jede quadratische Funktion lässt sich durch quadratische Ergänzung auf die Scheitelform bringen. Scheitel (-d | e)
Aber a zuerst ausklammern!

$$f(x) = ax^2 + bx +c$$
$$= a[x^2 + \tfrac{b}{a}x] + c$$



$f(x) = 3x^2 + 9x +10$

S (-1,5 | -16,75)
W = [-16,75; ∞ [

Monotonieverhalten:
Graph fällt]- ∞; -1,5[
Steigt]-1,5 ; ∞[

$$f(x) = 3x^2 + 9x -10$$
$$f(x) = 3 [x^2 + 3x] -10 \quad \textit{(3 ausklammern)}$$
$$f(x) = 3 [x^2 +3x + 1{,}5^2 – 1{,}5^2] – 10$$
$$= 3 [(x + 1{,}5)^2 – 2{,}25] -10$$
$$= 3(x+ 1{,}5)^2 - 3\cdot 2{,}25 – 10$$
$$= 3 (x + 1{,}5)^2 - 16{,}75$$
Scheitel (-1,5 | - 16,75)

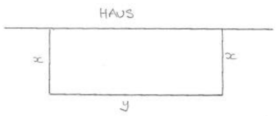
Der Graph ist nach unten geöffnet und enger als der Normalparabel.

2.6 Mitternachtsformel Eine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ kann mann lösen. $x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $b^2 - 4ac$ heißt die Diskriminante D Anzahl der Lösungen: D > 0 es gibt 2 Lösungen D = 0 es gibt 1 Lösung D< 0 es gibt keine Lösungen	Löse: $2x^2 + 9x - 5 = 0$ a = 2; b = 9 , c = -5 $x_{1;2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2}$ $x_{1;2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{4}$ $x_1 = \frac{-9+11}{4}$ $x_2 = \frac{-9-11}{4}$ $x_1 = 0{,}5$ $x_2 = -5$
2.7 Darstellungsformen quadratische Funktionen Allgemeine Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ Scheitelform $f(x) = a(x+d)^2 + e$ Scheitelpunkt S (-d|e) Nullstellenform $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ Nullstellen sind x_1 und x_2.	$f(x) = 3x^2 - 9x - 12$ $f(x) = 3(x-1{,}5)^2 - 18{,}75$ Scheitel S (1,5 | - 18,75) $f(x) = 3(x-4)(x+1)$ Nullstellen $x_1 = 4$; $x_2 = -1$
3. Quadratische Funktionen in Anwendung **3.1 Lineare Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten** 3 Gleichung werden gebraucht. 1. Auflösen einer Gleichung nach einer Variablen 2. Einsetzen des ermittelten Term in die beiden anderen Gleichungen. 3. Lösen des Gleichungsystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannte (sihe 8. Klasse) 4. Einsetzen der Lösung in der erste Gleichung zur Bestimmung der 3. Unbekannte.	(I) $3x + 2y + z = 3$ (II) $x - y + 2z = 6$ (III) $2x + 2y - z = -2$ (II) nach y auflösen und in (I) und (III) einsetzen (II) $y = x + 2z - 6$ In (I) $3x + 2(x + 2z - 6) + z = 3$ In (III) $2x + 2(x + 2z - 6) - z = -2$ (I)* $5x + 5z = 15$ (III)* $4x + 3z = 10$ (I)* nach z auflösen : $z = 3 - x$ In (III)* $4x + 3(3 - x) = 10$ | -9 $x = 1$ In (I)* $z = 3 - 1 = 2$ In (II) $y = 1 + 4 - 6 = -1$ $x = 1$; $y = -1$; $z = 2$
3.2 Funktionsterme von Parabeln bestimmen a) 3 Punkte sind gegeben – einsetzen jeweils in der allgemeine Form und LGS auflösen b) Scheitelpunkt und ein weiteren Punkt gegeben – Scheitelform nutzen und Punkt einsetzen um a zu bestimmen. c) Schnittpunkte mit der x-Achse und ein weiteren Punkt gegeben – Nullstellenform nutzen und Punkt einsetzen um a zu bestimmen.	a) Graph läuft durch A(-3|3), B (3|0) und C (4|0,8) $y = ax^2 + bx + c$ (I) $3 = a \cdot (-3)^2 + b \cdot 3 + c$ (II) $0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$ (III) $0{,}8 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$ b) Scheitel S(-1|-2) und läuft durch A (2|16) $f(x) = a(x+d)^2 + e$ $f(x) = a(x+1)^2 - 2$ $16 = a(2+1)^2 - 2$ $a = 2$ $f(x) = 2(x+1)^2 - 2$ c) durch A(-1|0), B(4|0) und C (1|12) $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ $f(x) = a(x+1)(x-4)$ $12 = a(1+1)(1-4)$ $12 = a \cdot 2 \cdot (-3)$ $a = -2$

$f(x) = -2(x+1)(x-4)$

3.3 Extremwert Aufgaben

Der Scheitelpunkt ergibt den maximal- bzw. den Minimalwert.
Drücke eine Größe als quadratische Funktion aus (mit 1 Variable) und dann den Scheitelpunkt ermitteln.



Mit einem 10 m langen Zaun soll an einer Hauswand ein Rechteck mit maximalen Flächeninhalt eingezäunt werden. Was ist der maximale Flächeninhalt?

$A = xy$
$2x + y = 10 \quad \Rightarrow y = 10 - 2x$
$A(x) = x(10-2x) = -2x^2 + 10x$
$A(x) = -2(x^2 - 5) = -2(x^2 - 5x + 2{,}5^2 - 2{,}5^2)$
$A(x) = -2(x - 2{,}5)^2 + 12{,}5$
Größtmöglichst Flächeninhalt beträgt 12,5 m² wenn $x = 2{,}5$ m und $y = 10 - 2 \cdot 2{,}5 = 5$ m

3.4 Schnittpunkte von Funktionsgraphen

Grafisch : Funktionen zeichnen und Schnittpunkte ablesen.

Rechnerisch: Funktionsterme gleichsetzen und für x auflösen. x-Werte in einer der 2 Funktionen einsetzen um den entsprechenden y-Werte zu berechnen.

$f(x) = x^2 - 4 \quad g(x) = x + 2$
$x^2 - 4 = x - 2$
$x^2 - x - 6 = 0$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$
$y_1 = 3 + 2 = 5 \qquad y_2 = -2 + 2 = 0$

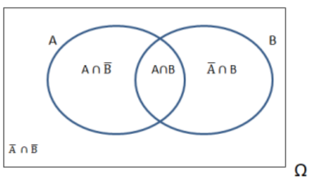
$S_1\,(3|5) \qquad S_2\,(-2|\,0)$

4. Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse

4.1 Mengendiagramme und Vierfeldertafeln

Schnittmenge $A \cap B$ (gelesen A geschnitten B) - gleichzeitig A und B
Vereinigungsmenge $A \cup B$ (gelesen A vereinigt B) - A oder B
Betrachtet man zwei Ereignisse A und B eines Zufallsexperiment, so beschreiben die Schnittmengen $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ *und* $\bar{A} \cap \bar{B}$ einer Zerlegung der Ergebnismenge Ω.

Wird ein Zufallsexperiment n-mal durchgeführt, können die absoluten Häufigkeiten in einer Vierfeldertafel dargestellt werden.



	B	$\bar{B}$	
A	H(A∩B)	H(A∩ $\bar{B}$)	H(A)
$\bar{A}$	H($\bar{A}$ ∩B)	H($\bar{A}$ ∩ $\bar{B}$)	H($\bar{A}$)
	H(B)	H($\bar{B}$)	H(Ω)

50 Schüler werden befragt wie oft die Ereignisse A „Ein Schüler isst Ananas" und B „Ein Schüler isst Bananen" auftreten.
Das Ereignis A tritt 24-mal und das Ereignis B 30-mal auf. Ausserdem 4 der Schüler keine der beiden Obstsorten essen.

	B	$\bar{B}$	SUMMEN-WERT
A	8	16	24
$\bar{A}$	22	4	26
SUMMEN-WERT	30	20	50

$H(A \cap B) = 8$
$H(A \cup B) = H(A \cap B) + H(A \cap \bar{B}) + H(\bar{A} \cap B)$
$= 8 + 16 + 22 = 46$

4.2 Vierfeldertafeln und Wahrscheinlichkeit

Statt absolute Häufigkeit, kann man relative Häufigkeiten in einer Vierfeldertafel eingetragen werden. Die Einträge kann man als Wahrscheinlichkeit interpretieren.

	B	$\bar{B}$	
A	P(A∩B)	P(A∩ $\bar{B}$)	P(A)
$\bar{A}$	P($\bar{A}$ ∩B)	P($\bar{A}$ ∩ $\bar{B}$)	P($\bar{A}$)
	P(B)	P($\bar{B}$)	P(Ω)

	B	$\bar{B}$	
A	$\frac{8}{50}$ = 16%	$\frac{16}{50}$ = 32%	$\frac{24}{50}$ = 48%
$\bar{A}$	$\frac{22}{50}$ = 44%	$\frac{4}{50}$ = 8%	$\frac{26}{50}$ = 52%
	$\frac{30}{50}$ = 60%	$\frac{20}{50}$ = 40%	100%

5. Ähnlichkeit und Strahlensatz

5.1 Ähnliche Figuren

Zwei Figuren F_1 und F_2, de man durch maßstabliches Vergrößern bzw. verkleinern auf zueinander kongruente Figuren abbilden kann, heißen ähnlich.
Schreibweise $F_1 \sim F_2$
Ähnliche Figure stimmen:

- In der Größe einander entsprechender Winkel und
- In Verhältnis entsprechender Seitenlängen uberein.

Das konstante Verhältnis der einander entsprechenden Seteinlängen heißt **Ähnlichkeitsfaktor k.**
Der Flächeninhalt von F_2 hat k^2-fachen Wert des Flächeninhalts von F_1
Das Volumen von K_2 hat k^3-fachen Wert des Volumens von K_1.

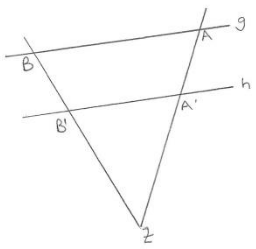
5.2 Ähnlichkeitssätze für Dreiecke:

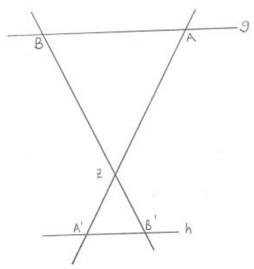
- Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen mit zwei Winkeln des anderen Dreiecks übereinstimmen (**WW-Satz**)
- Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen (**S:S:S-Satz**).

5.3 Strahlensatz bei der V-Figur und X-Figur

Voraussetzung: Zwei sich schneidende Geraden werden von zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten.

g || h



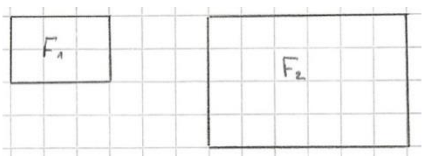


Für V-Figur gilt:

$$\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{A'A}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{B'B}|}$$

Für V-Figur und X-Figur gilt:

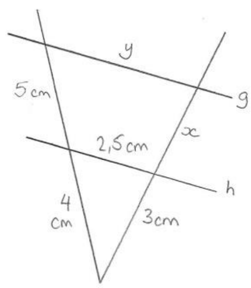
$$\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|}$$



$F_1 \sim F_2$

$k = \frac{Seitnlänge\ F_2}{Seitenlänge\ F_1} = \frac{4}{2} = 2$

$A_{F2} = 2^2 \cdot A_{F1}$



g || h

Berechne x und y

$$\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{A'A}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{B'B}|}$$

$\frac{3}{x} = \frac{4}{5}$ $\qquad x = \frac{3 \cdot 5}{4}$ $\qquad x = 3{,}75$ cm

$$\frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|}$$

$\frac{4}{4+5} = \frac{2{,}5}{y}$ $\qquad y = \frac{2{,}5 \cdot 9}{4}$ $\qquad y = 5{,}625$ cm

6. Potenzfunktionen

6.1 Mit natürlichen Exponenten

$f(x) = ax^n$ heißt Potenzfunktion

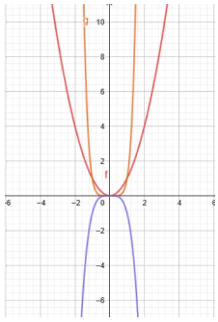
n ist gerade: Der Graph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse

a>0 Graph läuft von links oben nach rechts oben
Monotonieverhalten : für x <0 fallend, für x > 0 steigend
a< 0 Graph läuft von links unten nach rechts unten
Monotonieverhalten – für x < 0 steigend, für x > 0 fallend

n ist ungerade : der Graph ist punktsymmetrisch bezüglich den Ursprung

a > 0 Graph läuft von links unten nach rechts oben
Monotonieverhalten – immer steigend
a < 0 Graph läuft von links oben nach rechts unten
Monotonieverhalten – immer fallend

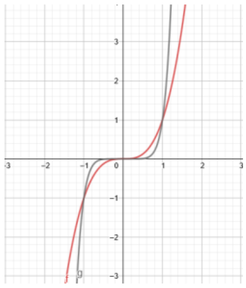
Schnittpunkte von Graphen:
Grafisch : Funktionen zeichnen und Schnittpunkte ablesen
Rechnerisch: Funktionsterme gleichsetzen und für x auflösen. Am besten ausklammern .
x-Werte in einer der 2 Funktionen einsetzen um den entsprechenden y-Werte zu berechnen.

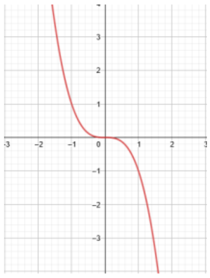


$f(x) = x^2$

$g(x) = x^6$

$h(x) = -x^4$





a>0
$f(x) = x^3$
$g(x) = x^7$

a < 0
$f(x) = -x^3$

6.2 n-te Wurzel

Die n-te Wurzel von a (a ≥ 0) ist diejenige **nicht** negative Zahl, der n-te Potenz a ergibt.

$\sqrt[n]{a}$

$\sqrt[3]{-8}$ geht nicht (a darf nich negativ sein)
aber $x^3 = -8$ hat die Lösung $x = -\sqrt[3]{8} = -2$

$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

$\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$

$\sqrt[5]{0{,}00001} = \sqrt[5]{0{,}1^5} = 0{,}1$

6.3 Potenzen mit rationale Exponenten

$$\boldsymbol{a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{a^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^z}}}$$

Für a > 0 , z ϵ Z und n ϵ N , n ≥ 2

Potenzgesetze:
Für a, b > 0 und rationale Exponenten r und s gilt:
$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
$a^r : a^s = a^{r-s}$
$a^r \cdot b^r = (ab)^r$
$a^r : b^r = (a:b)^r$
$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

$\sqrt[7]{4^3}$ als Potenz: $4^{\frac{3}{7}}$

$5^{\frac{2}{3}}$ als Wurzel: $\sqrt[3]{5^2}$

Vereinfache:

$7^{\frac{1}{2}} : 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{6}}$

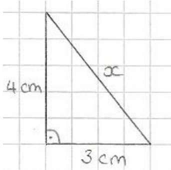
$3^{\frac{2}{5}} \cdot 4^{\frac{2}{5}} = (3 \cdot 4)^{\frac{2}{5}} = 12^{\frac{2}{5}}$

7. Satz des Pythagoras

7.1 Der Satz des Pythagoras

In einem rechtwinklign Dreieck ABC mit Katheten a und b und Hypotenuse c gilt:

$a^2 + b^2 = c^2$

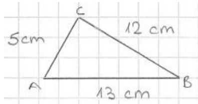


$a^2 + b^2 = c^2$
$3^2 + 4^2 = x^2$
$25 = x^2$
$x = 5$ cm

7.2 Der Kehrsatz zum Satz des Pythagoras

Wenn für die Seiten a, b und c eines Dreiecks die Gleichung
$a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig

Ist das Dreieck ABC rechtwinklig?

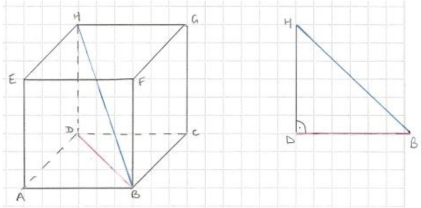


$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$
Ja, das Dreieck ist rechtwinklig

7.3 Berechnung an Figuren und Körper

Fertige eine Skizze, suche nach rechtwinklige Dreiecken in denen die Längen zweier Seiter bekannt sind und die dritte Seite mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnen.

Wurfel mit Kantenlänge 5 cm



Raumdiagonal $\overline{BH}$ berechnen:
$a^2 + b^2 = c^2$
$5^2 + 5^2 = (|\overline{BD}|)^2$
$(|\overline{BD}|)^2 = 50$

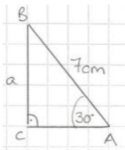
$(|\overline{BD}|)^2 + (|\overline{DH}|)^2 = (|\overline{BH}|)^2$
$50 + 5^2 = (|\overline{BH}|)^2$
$|\overline{BH}| = \sqrt{75}$ $\quad$ $|\overline{BH}| \approx 8{,}7$ cm

8. Trigonometrie

8.1 Sinus Kosinus und Tangens

In rechtwinkligen Dreiecken ABC gilt:

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$$
$$\cos\alpha = \frac{Ankathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$$
$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$$



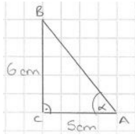
a) $\alpha = 30°$, c = 7 cm, berechne a

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

$\sin 30° = \frac{a}{7}$ $\quad$ a = 7· sin 30° $\quad$ a = 3,5 cm

8.2 Berechnung an rechtwinkligen Dreiecken

Fertige eine Skizze, benenne alle gegebene und gesuchten Strecken und Winkel.
Suche rechtwinklige Dreiecken aus, indem 2 Seiten oder eine Seite und ein Winkel bekannt sind um die gesuchten Seiten bzw. Winkel zu berechnen.



b) b = 5 cm, a = 6 cm , berechne α

$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{6}{5}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{6}{5}\right)$ $\quad$ $\alpha \approx 50{,}2°$

8.3 Beziehung zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

Für alle Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$ gilt:
$\sin \alpha = \cos(90° - \alpha) = \cos \beta$
bzw. $\cos \alpha = \sin(90° - \alpha)$
$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$
$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Vereinfache:
$(\cos \alpha)^3 + \cos \alpha \cdot (\sin \alpha)^2$
$= \cos \alpha \, ((\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2)$
$= \cos \alpha \cdot 1 = \cos \alpha$

$$\frac{1 - (\cos\alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} = \frac{(\sin \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} = (\tan \alpha)^2$$

8.4 Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Der Einheitskreis ist ein Kreis um den Ursprung mit r = 1.

Sinus und Kosinus können für alle Winkel zwischen 0° und 360° erklärt werden.

Ist α ein spitzer Winkel, so gilt:
$\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$; $\sin(180° + \alpha) = -\sin \alpha$; $\sin(360° - \alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$; $\cos(180° + \alpha) = -\cos \alpha$; $\cos(360° - \alpha) = \cos \alpha$

Bestimme jeweils den Winkel:

$\sin \alpha = 0{,}5$
$\alpha = 30°$ und $\alpha = 180° - 30° = 150°$

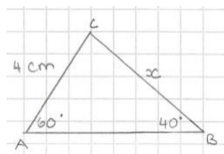
$\cos \beta = -0{,}8$ $\beta_1 \approx 143{,}1°$
$\beta_2 = 360° - \beta_1 \approx 216{,}9°$

$\sin \alpha = -0{,}6088$
$\alpha \approx -37{,}5$ (kann nicht sein!)
$\alpha_1 \approx 360° - 37{,}5 = 322{,}5°$
$\alpha_2 \approx 180° + 37{,}5 = 217{,}5°$

8.5 Der Sinussatz

Für nicht rechtwinkligen Dreiecken gilt:

$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ und $\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ und $\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$



Berechne x

$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

$\frac{x}{4} = \frac{\sin 60°}{\sin 40°}$ $x = 4 \cdot \frac{\sin 60°}{\sin 40°}$ $x \approx 5{,}4$ cm

8.6 Der Kosinussatz

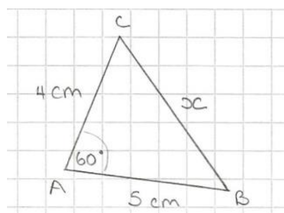
Der verallgemeinerten Satz des Pythagoras.

In jedem Dreieck ABC gilt:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$



Berechne x

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
$x^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 60°$
$x = \sqrt{21}$
$x \approx 4{,}6$ cm