Richtlinien
zur Veröffentlichung der Aufgaben der ersten Runde im Internet

Um eine weite Verbreitung der Aufgaben der ersten Runde der Mathematik-Olympiade zu erreichen und die Arbeit der Organisatoren zu erleichtern, kann eine Veröffentlichung der Aufgaben im Internet während der Bearbeitungszeit hilfreich sein. Diese Veröffentlichung kann nicht vor, sondern erst nach Wettbewerbsende auf der Webseite des Mathematik-Olympiaden e.V. erfolgen, da der Verein nicht Ausrichter der ersten Runde ist und sonst die ausdrücklich nicht erwünschte Möglichkeit besteht, dass Einsendungen an den Verein bzw. die Geschäftsstelle erfolgen, die dort nicht bearbeitet werden können.
Die Aufgaben dürfen vom Schuljahresbeginn bis zum Beginn der zweiten Runde lokal auf der Webseite des Veranstalters der ersten Runde (z. B. Schulhomepage) zum Download angeboten werden, wenn die nachfolgend aufgeführten Rahmenbedingungen beachtet werden.

(1) Auf der Webseite des Veranstalters muss klar zum Ausdruck kommen:
- wer der Ausrichter des Wettbewerbs ist,
- wer teilnahmeberechtigt ist,
- bei wem die Lösungen abzugeben sind,
- wann der Abgabeschluss für die Lösungen ist,
- wie über das Ergebnis informiert wird,
- dass eine Diskussion der aktuellen Wettbewerbsaufgaben in Internetforen untersagt ist.

Ein Muster ist unten abgedruckt.

(2) Nach Ende der ersten Runde müssen die Aufgaben von der Webseite des Veranstalters entfernt und durch einen Link auf die Webseite des Mathematik-Olympiaden e.V. ersetzt werden:
https://www.mathematik-olympiaden.de

(3) Die Lösungen dürfen zu keiner Zeit im Netz veröffentlicht werden.

Beispiel für eine Homepage, von der die Aufgaben der ersten Runde heruntergeladen werden können:

1. Runde der Mathematik-Olympiade 2023 an der xy-Schule in AB-Stadt

Der Wettbewerb richtet sich an alle Schülerinnen und Schüler der Klassen 5 bis 13 unserer Schule.

Die Aufgaben können bei den Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern in gedruckter Form abgeholt oder hier (Link) heruntergeladen werden.

Lösungen können bis zum ??.??.2023 bei den Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern (alternativ z.B. bei Herrn Müller im Lehrerzimmer) abgegeben werden.

Teilnehmerinnen und Teilnehmer erhalten am ??.??.2023 das Ergebnis durch Aushang am Informationsbrett.

Erfolgreiche Teilnehmerinnen und Teilnehmer qualifizieren sich für die 2. Runde der Mathematik-Olympiade, die am 15.11.2023 als Regionalrunde in Pi-Stadt stattfinden wird.

Eine Diskussion der aktuellen Wettbewerbsaufgaben in Internetforen ist untersagt.

Olympiadeklassen **9–10**

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

<u>Hinweise:</u> 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

<u>631011</u>

a) Für die Zahl a gelte

$$a = 444\,444\,444\,444\,445^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111$$

und für die Zahl b

$$b = 544\,444\,444\,444\,444^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111\,.$$

Berechnen Sie die Quersummen von a und b.

b) Zu einer gegebenen positiven ganzen Zahl s betrachten wir nun die s-stellige natürliche Zahl k, deren Zifferndarstellung aus s Einsen besteht, also $k = \underbrace{1...1}_{s-\text{mal}}$, sowie die ebenfalls s-stellige natürliche Zahl $m = 4k = \underbrace{4...4}_{s-\text{mal}}$.

Nun ersetzen wir eine beliebige der Ziffern von m durch die Ziffer 5 und erhalten die Zahl n; es sind also s verschiedene Werte für n möglich. Zu jedem dieser Werte bilden wir analog zur obigen Teilaufgabe die Zahl c mit

$$c = n^2 - m^2 + k\,.$$

Ermitteln Sie die Anzahl der Werte, welche die Quersummen dieser Zahlen c in Abhängigkeit von der Stellenzahl s annehmen können.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

631012

Gegeben sind vier Geraden durch ihre Gleichungen.

$$\begin{aligned} g_1\colon\ & y = \frac{2}{9}\cdot x + \frac{5}{9}\,,\\ g_2\colon\ & y = \frac{7}{6}\cdot x - \frac{59}{6}\,,\\ g_3\colon\ & 7\cdot x - 6\cdot y = 8\,,\\ g_4\colon\ & 2\cdot x - 9\cdot y = -56\,. \end{aligned}$$

Klassifizieren Sie das konvexe Vieleck so genau wie möglich, das durch die Schnittpunkte dieser vier Geraden bestimmt ist.

Hinweis: Klassifizieren bedeutet hier zu klären, wie viele Ecken das Vieleck hat und ob es besondere Eigenschaften bezüglich der Seiten oder Winkel gibt, sodass dem Vieleck eine besondere Bezeichnung (zum Beispiel: gleichseitiges Dreieck, Rechteck, gleichwinkliges Sechseck) zugewiesen werden kann.

631013

Von den Zahlen 2023, 2024 und 2025 ist die erste durch die Quadratzahl 289, die zweite durch die Quadratzahl 4 und die dritte durch die Quadratzahl 25 teilbar.

a) Geben Sie drei weitere Beispiele für jeweils drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen an, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.
b) Zeigen Sie: Es gibt sogar unendlich viele Beispiele für drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.
c) Finden Sie ein Beispiel mit vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.

631014

Um eine Gleichung zu lösen, bei der die Lösungsvariable im Radikanden einer Wurzel vorkommt, ist es empfehlenswert, die Gleichung zu quadrieren.

Beispiel 1:

$$\sqrt{2x+1} = -7\,.$$

Es muss $x \geq -0{,}5$ sein, damit die Wurzel definiert ist.

Quadrieren auf beiden Seiten der Gleichung führt zu $2x + 1 = 49$. Diese Gleichung hat die Lösung $x = 24$. Setzt man diese Zahl in die Ausgangsgleichung ein, so stellt man fest, dass 24 keine Lösung ist.

Merke: Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung. Es *kann* zu Scheinlösungen führen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Beispiel 2:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-6} = \sqrt{2x-2}\,.$$

Es muss $x \geq 6$ sein, damit alle Wurzeln definiert sind.

Wenn man beide Seiten der Gleichung quadriert und umformt, dann erhält man

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} = 2\,.$$

Erneutes Quadrieren führt zur quadratischen Gleichung $x^2 - 6x - 4 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 3 - \sqrt{13}$ und $x_2 = 3 + \sqrt{13}$. Wegen $3 - \sqrt{13} < 0 < 6$ ist $\sqrt{x_i - 6}$ jedoch nicht definiert; es handelt sich also um eine Scheinlösung. Auch für x_2 muss geprüft werden, ob es sich um eine Lösung handelt, denn wir haben nicht äquivalent umgeformt. Dabei genügt eine numerische Auswertung mit dem Taschenrechner nicht, da sich auf diese Weise niemals die exakte Gleichheit von

$$\sqrt{\sqrt{13}+3} + \sqrt{\sqrt{13}-3} = \sqrt{2\sqrt{13}+4}$$

zeigen lässt. Diese Gleichheit folgt aus der Beziehung

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\sqrt{13}+3} + \sqrt{\sqrt{13}-3}\right)^2 &= \sqrt{13}+3+2\sqrt{\left(\sqrt{13}+3\right)\left(\sqrt{13}-3\right)} + \sqrt{13}-3 \\ &= 2\sqrt{13} + 2\sqrt{13-9} = 2\sqrt{13}+4\end{aligned}$$

und der Aussage, dass für zwei Zahlen $A, B > 0$ und $A = B$ auch $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ gilt.

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-6} = \sqrt{2x-14}\,.$$

b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+14} + \sqrt{x-7}\,.$$

<u>631015</u>

a) In der Ebene sind zwei Punkte A und B gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Summe der Abstände

$$\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{BP}\right|$$

des Punktes P zu den Punkten A und B minimal (also so klein wie möglich) wird. Geben Sie den minimalen Wert an.

b) In der Ebene ist ein Quadrat $ABCD$ gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Abstandssumme

$$\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{BP}\right| + \left|\overline{CP}\right| + \left|\overline{DP}\right|$$

minimal wird.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

631016

a) Fünf Städte sollen durch Straßen miteinander verbunden werden, sodass man von jeder Stadt aus jede andere erreichen kann. Dabei führt jede Straße von einer Stadt zu einer anderen, ohne dass sich die Straßen überschneiden (kreuzungsfreies Bauen soll möglich sein – notfalls mit Brücken).

   Wie viele Straßen muss man wenigstens bauen?

b) Nun sollen 2023 Städte miteinander wie in a) beschrieben verbunden werden. Dabei soll zusätzlich gelten, dass je zwei dieser Städte auf genau eine Weise über einen Weg aus einer oder mehreren Straßen verbunden sind. Als Weg bezeichnen wir dabei eine Fahrtroute zwischen zwei (verschiedenen) Städten, die gegebenenfalls über eine oder mehrere weitere Städte führt, wobei jede dieser weiteren Städte genau einmal durchfahren wird.

   Wie viele Straßen (direkte Verbindungen zwischen zwei Städten) hat ein solches Straßennetz?